

## Лекція. Голоморфні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Якщо функції  $a_1$  і  $a_0$  є голоморфними в однозв'язній області  $G$ , то згідно з теоремою Коші кожен розв'язок рівняння

$$f'' + a_1 f' + a_0 f = 0 \quad (1)$$

є голоморфною функцією в  $G$ . Значна кількість досліджень присвячена вивченню властивостей голоморфних розв'язків таких рівнянь (швидкість зростання, розподіл нулів тощо). Разом з тим, кожен розв'язок рівняння (1) може бути функцією, голоморфною в  $G$  і в тому випадку, коли функції  $a_1$  і  $a_0$  не голоморфні в  $G$ . Подібні запитання можна сформулювати і для таких рівнянь. Проте, в літературі ми не знайшли готового критерію голоморфності кожного розв'язку рівняння (1), хоч всі необхідні факти для його отримання (на що звернув нашу увагу проф. А.З. Мохоцько) є давно відомими ([1], [2]). Мета даної замітки – вказати відповідний критерій. Крім цього, ми також розглядаємо умови, за яких існує фундаментальна система розв'язків рівняння

$$f'' + a_1 f' + a_0 f = \lambda f \quad (2)$$

утворена цілими функціями параметра  $\lambda$ , що важливо для дослідження крайових задач.

**Теорема 1.** Нехай функції  $a_0$  і  $a_1$  є неперервними на деякому проміжку  $\Delta$  з однозв'язної області  $G$ ,  $\Delta \subset G$ . Тоді наступні умови еквівалентні:

1) кожен розв'язок рівняння (1) на проміжку  $\Delta$  є функцією, голоморфною в  $G$ , тобто допускає голоморфне продовження в  $G$ ;

2) існують дві лінійно незалежні функції  $f_1$  і  $f_2$ , голоморфні в  $G$ , для яких

$$\frac{w'}{w} = -a_1, \quad \frac{f_1' f_2'' - f_2' f_1''}{w} = a_0, \quad w := f_1 f_2' - f_2 f_1';$$

3) функції  $a_0$  і  $a_1$  є мероморфними в  $G$ , причому:

а) множина полюсів функції  $a_0$  є підмножиною множини  $B$  полюсів функції  $a_1$ ;

б) функція  $a_1$  є голоморфною в  $G$  або має в  $G$  полюси першого порядку;

в) функція  $a_0$  має в  $G$  полюси не вище другого порядку;

г) для кожного  $\beta \in B$  корені  $\alpha_1 = \alpha_1(\beta)$  і  $\alpha_2 = \alpha_2(\beta)$  рівняння

$$\alpha(\alpha - 1) + a_{1,0}\alpha + a_{0,0} = 0 \quad (3)$$

є різними цілими невід'ємними числами:  $\alpha_1 = \alpha_2 + p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ;

д)

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & S_0(\alpha_2 + 1) & S_1(\alpha_2) \\ 0 & \dots & S_0(\alpha_2 + 2) & S_1(\alpha_2 + 1) & S_2(\alpha_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_0(\alpha_2 + p - 1) & \dots & S_{p-3}(\alpha_2 + 2) & S_{p-2}(\alpha_2 + 1) & S_{p-1}(\alpha_2) \\ S_1(\alpha_2 + p - 1) & \dots & S_{p-2}(\alpha_2 + 2) & S_{p-1}(\alpha_2 + 1) & S_p(\alpha_2) \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

де  $S_0(m) = m(m-1) + ma_{1,0} + a_{0,0}$  і  $S_k(m) = ma_{1,k} + a_{0,k}$  для  $k \in \mathbb{N}$ , а числа  $a_{0,k} = a_{0,k}(\beta)$  і  $a_{1,k} = a_{1,k}(\beta)$  знаходяться з розвинень

$$a_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k}(z-\beta)^{k-1}, \quad a_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k}(z-\beta)^{k-2}.$$

**Доведення.** Еквівалентність умов 1) і 2) впливає безпосередньо із відомих формул для знаходження коефіцієнтів рівняння (1) через його фундаментальну систему. Якщо виконується 1), то з формул пункту 2) видно, що виконується а) і б) (вронскіан може дорівнювати нулеві лише в точках множини  $B$ ). Оскільки  $a_0$  можна також подати у вигляді  $a_0 = -\frac{f_1''}{f_1} + \frac{f_1' w'}{f_1 w}$ , то виконується в). Шукаючи розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$f(z) = (z-\beta)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{F}_k (z-\beta)^k, \quad \mathfrak{F}_0 \neq 0, \quad (5)$$

одержимо ([3, с.350], [4, с.360]), що  $\alpha$  є коренем рівняння (3). Тому корені  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  є цілими невід'ємними числами:  $\alpha_1 = \alpha_2 + p$ ,  $p \in \mathbb{Z}_+$ . При цьому рівняння (1) має ([5, с.284]) розв'язок, голоморфний в деякому околі точки  $\beta$  вигляду (5), де  $\alpha = \alpha_1$ . Якщо  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , то, шукаючи розв'язок рівняння (1) у вигляді (5), переконуємось ([1, с.536], [6, с.119]), що всі розв'язки рівняння (1), голоморфні в деякому околі точки, мають вигляд  $cf(z)$ , де  $c$  – деяке число і  $f(z)$  – один із розв'язків рівняння (1) вигляду (5). Тому в цьому випадку рівняння (1) не має фундаментальної системи розв'язків, яка б складалася з функцій, голоморфних в деякому околі точки  $\beta$ . Отже,  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  і г) доведено. Нехай  $\alpha_1 = \alpha_2 + p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Знайдемо умови, за яких меншому кореневі рівняння (3) теж відповідає розв'язок, голоморфний в деякому околі точки  $\beta$  вигляду (5). Нехай такий розв'язок вигляду (5), в якому  $\alpha = \alpha_2$ , існує. Тоді, підставивши  $f$  у рівняння, приходимо до системи рівностей ([1, с.535], [2, с.55], [4, с.360])

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}_0 S_0(\alpha) = 0, \\ \mathfrak{F}_1 S_0(\alpha+1) + \mathfrak{F}_0 S_1(\alpha) = 0, \\ \mathfrak{F}_2 S_0(\alpha+2) + \mathfrak{F}_1 S_1(\alpha+1) + \mathfrak{F}_0 S_2(\alpha) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{F}_p S_0(\alpha+p) + \mathfrak{F}_{p-1} S_1(\alpha+p-1) + \dots + \mathfrak{F}_0 S_p(\alpha) = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (6)$$

Оскільки  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  є коренями рівняння (3), то  $S_0(\alpha_2 + p) = S_0(\alpha_1) = S_0(\alpha_2) = 0$ . Отже, для того, щоб система (6) мала розв'язок необхідно, щоб  $\mathfrak{F}_{p-1} S_1(\alpha+p-1) + \mathfrak{F}_{p-2} S_2(\alpha+p-2) + \dots + \mathfrak{F}_0 S_p(\alpha) = 0$ . Тому, враховуючи існування ненульового розв'язку системи, складеної з перших  $p+1$  рівнянь системи (6), приходимо до умови (4) ([1, с.547], [2, с.79]).

Навпаки, припустимо, що виконується умова 3). Тоді ([3, с.352], [5, с.284], [2, с.58, с.78]) рівняння (1) має голоморфний в деякому околі кожної точки  $\beta \in B$  розв'язок  $f = f_1$  вигляду (5), в якому  $\alpha = \alpha_1$ . Оскільки визначник (4), утворений другим, третім, ...,  $p$ -м рівняннями системи (6) при  $\alpha = \alpha_2$  дорівнює нулеві і  $S_0(\alpha_2 + p) = 0$ , то така система має ненульовий розв'язок  $(\mathfrak{F}_0; \mathfrak{F}_1; \dots; \mathfrak{F}_p)$ . Крім цього, якщо  $(\mathfrak{F}_0; \mathfrak{F}_1; \dots; \mathfrak{F}_p)$  – розв'язок, то  $(\mathfrak{F}_0; \mathfrak{F}_1; \dots; \mathfrak{F}_{p-1}; c_p)$  – розв'язок і  $(c_0 \mathfrak{F}_0; c_0 \mathfrak{F}_1; \dots; c_0 \mathfrak{F}_{p-1}; c_0 \mathfrak{F}_p)$  – розв'язок при будь-яких  $c_0 \in \mathbb{C}$  і  $c_p \in \mathbb{C}$ . Застосувавши

метод степеневих рядів, переконуємось, що рівняння (1) має (це впливає також з [2, с.59,с.89], [1, с.536]) розв'язок  $f_2 = \mathfrak{E}_p f_1 + \mathfrak{E}_0 \tilde{f}_2$ , де функції  $f_1$  і  $\tilde{f}_2$  – розв'язки рівняння (1) в околі точки  $\beta$  вигляду (5) з  $\alpha = \alpha_1$  і  $\alpha = \alpha_2$  відповідно. Оскільки  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , то ці розв'язки лінійно незалежні. Нехай  $f$  – деякий розв'язок рівняння (1) на деякому проміжку  $\Delta \in G$ . Тоді за теоремою Коші ([7, с.29], [8, с.350]) його можна аналітично продовжити в кожну точку  $z \notin B$ . Але в деякому околі кожної точки  $\beta \in B$  існує фундаментальна система розв'язків рівняння, яка складається з функцій, голоморфних в цьому околі. Тому кожний розв'язок  $f$  рівняння (1) з проміжку  $\Delta$  можна аналітично продовжити в кожну точку  $z \in G$ . Оскільки область  $G$  є однозв'язною, то застосування теореми про монодромію завершує доведення.

**Зауваження 1.** Зазначимо, що рівняння (3) має два різні цілі невід'ємні розв'язки тоді і тільки тоді, коли  $a_{1,0} = q$  і  $a_{0,0} = \frac{1-\nu^2}{4} - q \frac{1+\nu}{2}$ , де  $-q \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\nu$  непарне натуральне число таке, що  $-q < \nu \leq 1-2q$ . При цьому  $\alpha_1 = (1+\nu)/2$  і  $p = \nu + q$ . Враховуючи це, ми можемо при бажанні записати (4) в різних еквівалентних формах.

**Зауваження 2.** У випадках  $p=1$  та  $p=2$  умова (4) рівносильна відповідно до умов  $S_1(\alpha_2) = 0$  і  $S_0(\alpha_2+1)S_2(\alpha_2) - S_1(\alpha_2+1)S_1(\alpha_2) = 0$ .

**Приклад 1.** Нехай  $\mu \in \mathbb{Z}_+$  і  $\varphi(z)$  – функція, голоморфна в однозв'язній області  $\{0\} \in G \subset \mathbb{C}$ . Тоді рівняння  $f'' - \frac{2\mu}{z} f' + \left( \frac{\mu(\mu+1)}{z^2} + \varphi(z) \right) f = 0$  має фундаментальну систему розв'язків, яка складається із функцій, голоморфних в  $G$ , для яких в точці  $z=0$  виконується  $\alpha_1 = \mu+1$ ,  $\alpha_2 = \mu$ .

**Приклад 2.** Нехай  $\mu \in \mathbb{Z}_+$  і  $\psi(z)$  – функція, голоморфна в однозв'язній області  $\{0\} \in G \subset \mathbb{C}$ ,  $\psi(0) = 0$  і  $a \in \mathbb{C}$ . Тоді рівняння  $f'' - \frac{2\mu+1}{z} f' + \left( \frac{\mu(\mu+2)}{z^2} + \frac{a}{z} - a^2 + \psi(z) \right) f = 0$  має фундаментальну систему розв'язків, яка складається з функцій, голоморфних в  $G$ , для яких в точці  $z=0$  виконується  $\alpha_1 = \mu+2$ ,  $\alpha_2 = \mu$ .

Міркуваннями, подібними до доведення теореми 1, нескладно отримати таку теорему.

**Теорема 2.** Нехай функція  $a_0$  є неперервною на деякому проміжку  $\Delta$ , який належить до однозв'язної області  $G$ . Тоді наступні умови еквівалентні:

4) кожен розв'язок рівняння

$$f' + a_0 f = 0 \quad (7)$$

на проміжку  $\Delta$ , є функцією, голоморфною в  $G$ ;

5) існує функція  $f_1 \neq 0$ , голоморфна в  $G$ , для якої  $a_0 = -f_1' / f_1$ ;

6) функція  $a_0$  є голоморфною в  $G$  або має в  $G$  полюси першого порядку і  $-a_{0,0} \in \mathbb{Z}_+$  для кожного полюса  $\beta \in B$ , де  $a_{0,0} = a_{0,0}(\beta) \equiv \operatorname{res}_{z=\beta} a_0(z)$ . Якщо одна з цих умов виконана, то в кожній точці  $\beta \in B$  розв'язок рівняння (7) має нуль порядку  $-a_{0,0}$ , де  $B$  – множина полюсів  $a_0$ .

**Наслідок 1.** Нехай функція  $a_1$  є неперервною на деякому проміжку  $\Delta$ , який належить до однозв'язної області  $G$ . Для того щоб кожен розв'язок рівняння  $f'' + a_1 f' = 0$  на проміжку  $\Delta$  був функцією, голоморфною в  $G$ , необхідно і достатньо, щоб функція  $a_0 = a_1$  задовольняла умову б).

**Доведення.** Наслідок 1 випливає з теореми 1, позаяк останній стовбець визначника (4) є нульовим. Цей же наслідок випливає також з теореми 2, оскільки похідна і первісна функції, голоморфної в однозв'язній області  $G$ , є голоморфною функцією в  $G$ .

**Наслідок 2.** Нехай функція  $a_0$  є неперервною на деякому проміжку  $\Delta$ , який належить до однозв'язної області  $G$ . Тоді для того щоб кожен розв'язок рівняння

$$f'' + a_0 f = 0 \quad (8)$$

на проміжку  $\Delta$  був функцією, голоморфною в  $G$ , необхідно і достатньо, щоб функція  $a_0$  була голоморфною в  $G$ .

**Доведення.** Достатність випливає з теореми Коші. З іншого боку, якщо  $\{f_1, f_2\}$  – фундаментальна система розв'язків рівняння (1) на проміжку  $\Delta$ , то  $w(z) = c$ , де  $c \neq 0$  – стала, і  $a_0 = (f_1' f_2'' - f_2' f_1'') / w$ . Тому  $a_0$  є голоморфною функцією в  $G$ .

**Зауваження 3.** Відома заміна  $f = g \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int a_1(t) dt \right\}$  зводить знаходження розв'язків рівняння (1) до знаходження розв'язків рівняння (8). Проте, якщо кожний розв'язок рівняння (1) є голоморфною функцією, то розв'язки отриманого так рівняння (8) не завжди є голоморфними. Наприклад, рівняння  $f'' - \left( \frac{1}{z} + 1 \right) f' + \frac{f}{z} = 0$ , розв'язками якого є функції  $f(z) = c_1(1+z) + c_2 e^z$ , після заміни набуває вигляду  $g'' - \left( \frac{3}{4z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} \right) g = 0$ .

В [9] вказано умови, за яких кожен розв'язок рівнянь (1), (7), (8) з голоморфними в одиничному крузі коефіцієнтами є функцією голоморфною і обмеженою в цьому крузі. Природно запитати, коли це правильно для таких рівнянь з мероморфними коефіцієнтами.

**Теорема 3.** Нехай функція  $a_0$  є неперервною на деякому проміжку  $\Delta$ , що належить до  $U(0;1) := \{z : |z| < 1\}$ . Тоді наступні умови еквівалентні:

7) кожен розв'язок рівняння (7) на проміжку  $\Delta$  є функцією, голоморфною і обмеженою в  $U(0;1)$ ;

8) існує функція  $f_1 \neq 0$ , голоморфна і обмежена в  $U(0;1)$ , для якої  $a_0 = -f_1' / f_1$ ;

9) функція  $a_0$  є голоморфною в  $U(0;1)$  або мероморфною в  $U(0;1)$  з полюсами першого порядку,  $-a_{0,0} \in \mathbb{Z}_+$  для кожного полюса  $\beta \in B$  і функція  $-a_0$  має таку аналітичну первісну  $A_0$  в  $U(0;1) \setminus B$ , що функція  $\operatorname{Re} A_0(z)$  є однозначною в  $U(0;1) \setminus B$  і існує стала  $c$ , що  $\exp(\operatorname{Re} A_0(z)) \leq c$  для будь-якого  $z \in U(0;1)$ , де  $a_{0,0} = a_{0,0}(\beta) \equiv \operatorname{res}_{z=\beta} a_0(z)$ ;

$$10) \ a_0(z) = - \left( \sum_n m_n \left( \frac{1}{z - \lambda_n} + \frac{\overline{\lambda_n}}{1 - \overline{\lambda_n} z} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{it}}{(e^{it} - z)^2} d\sigma(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{it}}{(e^{it} - z)^2} \ln|f_0(t)| dt \right),$$

де  $\sigma: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  – незростаюча функція на  $[-\pi; \pi]$ , похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь,  $f_0: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  – обмежена функція на  $[-\pi; \pi]$ , для якої  $\ln|f_0| \in L_1[-\pi; \pi]$ ,  $m_j \in \mathbb{Z}_+$  і  $\{\lambda_n\}$  – довільна множина (скінченна або нескінченна) комплексних чисел з круга  $U(0;1)$ , яка не має в  $U(0;1)$  граничних точок і  $\sum_n (1 - |\lambda_n|) < +\infty$ .

**Доведення.** Еквівалентність умов 7) і 8) очевидна. З відомих формул ([10, с.100], [11, с.80]) про зображення довільної голоморфної і обмеженої функції в  $U(0;1)$  впливає рівносильність умов 7) і 10). Еквівалентність умов 7) і 9) встановлюється очевидно з врахуванням теореми 2 (тут під аналітичною первісною функції  $-a_0$  розуміємо аналітичну функцію  $A_0$ , яка отримується за допомогою аналітичного продовження вздовж всеможливих неперервних шляхів з  $U(0;1) \setminus B$  деякої голоморфної первісної функції  $-a_0$  у деякому крузі  $U \subset U(0;1) \setminus B$ ).

**Зауваження 4.** Якщо функція  $a_0$  має вигляд  $a_0(z) = - \left( \sum_{k=1}^s \frac{m_k}{z - \lambda_k} + B_0(z) \right)$ , де  $s, m_k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\lambda_k \in U(0;1)$  і  $B_0$  – функція, голоморфна в  $U(0;1)$ , для якої  $\sup \left\{ \int_0^r |B_0(te^{i\varphi})| dt : (\varphi; r) \in [0; 2\pi] \times [0; 1] \right\} < +\infty$ , то кожен розв'язок рівняння (7) на проміжку  $\Delta$  є функцією, голоморфною і обмеженою в  $U(0;1)$ , оскільки  $\operatorname{Re} A_0(z) \leq \sum_{k=1}^s m_k \ln|z - \lambda_k| + \int_0^r |B_0(te^{i\varphi})| dt + c$  для деякої сталої  $c$ .

**Теорема 4.** Нехай функції  $a_0$  і  $a_1$  є неперервними на деякому проміжку  $\Delta$  з однов'язної області  $G$ . Тоді для того щоб існувала фундаментальна система  $\{f_1(z; \lambda); f_2(z; \lambda)\}$  розв'язків рівняння (2) на проміжку  $\Delta$ , яка складається із функцій  $f_1$  та  $f_2$ , голоморфних в  $G \times \mathbb{C}$ , необхідно і достатньо, щоб функції  $a_0$  і  $a_1$  були мероморфними в  $G$ , виконувались умови а)-г) теореми 1 і для кожного  $\lambda \in \mathbb{C}$

е)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & S_0(\alpha_2 + 1) & S_1(\alpha_2) \\ 0 & 0 & \dots & S_1(\alpha_2 + 1) & S_2(\alpha_2) - \lambda \\ 0 & 0 & \dots & S_2(\alpha_2 + 1) - \lambda & S_3(\alpha_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_0(\alpha_2 + p - 1) & S_1(\alpha_2 + p - 2) & \dots & S_{p-2}(\alpha_2 + 1) & S_{p-1}(\alpha_2) \\ S_1(\alpha_2 + p - 1) & S_2(\alpha_2 + p - 1) - \lambda & \dots & S_{p-1}(\alpha_2 + 1) & S_p(\alpha_2) \end{vmatrix} = 0.$$

**Доведення.** Необхідність випливає з теореми 1. Доведемо достатність. Нехай  $R = R(\beta)$  – менший із радіусів збірностей рядів Тейлора функцій  $a_0(z)(z - \beta)^2$  і  $a_1(z)(z - \beta)$  в околі точки  $\beta \in B$ . Згідно з теоремою 1 для кожного

$\lambda \in \mathbb{C}$  рівняння (2) має фундаментальну систему  $\{f_1(z; \lambda); f_2(z; \lambda)\}$  розв'язків в  $U(\beta; R) := \{z : |z - \beta| < R\}$ , яка складається з функцій  $f_1(z; \lambda)$  і  $f_2(z; \lambda)$ , голоморфних в  $G$ , як функцій змінної  $z$ , вигляду

$$f_i(z; \lambda) = (z - \beta)^{\alpha_i} \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{F}_{i,k}(z - \beta)^k, \quad \mathfrak{F}_{i,0} \neq 0, \quad (9)$$

де  $\mathfrak{F}_{i,k} = \mathfrak{F}_{i,k}(\lambda)$ ,  $i \in \{1; 2\}$ . При цьому можна взяти  $\mathfrak{F}_{i,0} = 1$ . Тоді  $\mathfrak{F}_{i,1} = -S_1(\alpha_i) / S_0(\alpha_i + 1)$  від  $\lambda \in \mathbb{C}$  не залежать. Розглянемо функцію  $f_1(z; \lambda)$ . З системи (6) отримуємо [3, с.350], що  $\mathfrak{F}_{1,k} = A_1 / A_2$  для будь-якого  $k \in \mathbb{N}$ , де  $A_1 = \sum_{m=0}^{k-1} ((\alpha_1 + m)a_{1,k-m} + \tilde{a}_{0,k-m})\mathfrak{F}_{1,m}$  і  $A_2 = (k + \alpha_1)(k + \alpha_1 - 1) + (k + \alpha_1)a_{1,0} + \tilde{a}_{0,0}$ ,  $\tilde{a}_{0,2} = a_{0,2} - \lambda$  і  $\tilde{a}_{0,k} = a_{0,k}$ , якщо  $k \neq 2$ . Тоді ([3, с.351])  $|A_2| \geq |k(k - p)|$ . Далі, якщо  $\rho \in (0; R)$ ,  $r \in (0; +\infty)$ ,  $\tilde{a}_{0,2} = |a_{0,2}| + r$  і  $\tilde{a}_{0,k} = |a_{0,k}|$  для  $k \neq 2$ , то  $\max \{\tilde{a}_{0,k}\rho^k : k \in \mathbb{Z}_+\} = M(r) < +\infty$ ,  $\max \{a_{1,k}\rho^k : k \in \mathbb{Z}_+\} = M < +\infty$  і  $A_1 \leq \tilde{M} \left( (\alpha_1 + 1) \frac{|\mathfrak{F}_{1,0}|}{\rho^k} + (\alpha_1 + 2) \frac{|\mathfrak{F}_{1,1}|}{\rho^{k-1}} + \dots + (\alpha_1 + k) \frac{|\mathfrak{F}_{1,k-1}|}{\rho} \right)$ , де  $\tilde{M} = \max \{M, M(r)\}$ . Нехай  $\mathfrak{F}_{1,k} = \frac{\tilde{M}}{k(k - p)} \left( (\alpha_1 + 1) \frac{|\mathfrak{F}_{1,0}|}{\rho^k} + (\alpha_1 + 2) \frac{|\mathfrak{F}_{1,1}|}{\rho^{k-1}} + \dots + (\alpha_1 + k) \frac{|\mathfrak{F}_{1,k-1}|}{\rho} \right)$  для  $k > p$ ,  $\mathfrak{F}_{1,k} = |\mathfrak{F}_{1,k}|$  для  $k \in \{0; 1\}$  і  $\mathfrak{F}_{1,k} = \max_{|\lambda| \leq r} \{|\mathfrak{F}_{1,k}(\lambda)|\}$  для  $2 \leq k \leq p$ . Тоді  $\mathfrak{F}_{1,k} \geq |\mathfrak{F}_{1,k}|$  для всіх  $k \in \mathbb{Z}_+$  і  $\rho k(k - p)\mathfrak{F}_{1,k} - (k - 1)(k - 1 - p)\mathfrak{F}_{1,k-1} = \tilde{M}(\alpha_1 + k)\mathfrak{F}_{1,k-1}$ ,  $k > p$ . Отже,  $\mathfrak{F}_{1,k-1} / \mathfrak{F}_{1,k} \rightarrow \rho$ . Тому приходимо до висновку, що ряд (9) для  $i = 1$  є рівномірно збіжним на кожній множині  $\{z : |z - \beta| \leq \rho < R\} \times \{\lambda : |\lambda| \leq r < +\infty\}$  і функції  $\mathfrak{F}_{1,k}(z - \beta)^k$  є голоморфними в  $\{z : |z - \beta| < R\} \times \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ . Отже, рівняння (2) має в  $\{z : |z - \beta| < R\}$  розв'язок вигляду (9), де  $i = 1$ , який є функцією, голоморфною в  $\{z : |z - \beta| < R\} \times \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ . Подібно встановлюємо, що рівняння (2) має в  $\{z : |z - \beta| < R\}$  розв'язок  $f_2(z; \lambda)$  вигляду (9), де  $i = 2$ , який є функцією, голоморфною в  $\{z : |z - \beta| < R\} \times \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ . Отже, в  $\{z : |z - \beta| < R\}$  існує фундаментальна система розв'язків рівняння (2), яка складається з функцій, голоморфних в  $\{z : |z - \beta| < R\} \times \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ . Тому згідно з теоремою 1 і за доповненням до теореми Коші [8, с.351-352], для кожної точки  $d_i \in G$  існує круг  $\{z : |z - d_i| < R(d_i)\}$  такий, що рівняння (2) має фундаментальну систему  $\{f_{1,i}(z; \lambda); f_{2,i}(z; \lambda)\}$  розв'язків, яка складається із функцій, голоморфних в  $\{z : |z - d_i| < R(d_i)\} \times \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ . Якщо  $D_{ij} := \{z : |z - d_i| < R(d_i)\} \cap \{z : |z - d_j| < R(d_j)\} \neq \emptyset$ , то  $f_{1,i}(z; \lambda) = c_1 f_{1,j}(z; \lambda) + c_2 f_{2,j}(z; \lambda)$  для  $z \in D_{ij}$  та деяких сталих  $c_1 = c_1(\lambda)$  та  $c_2 = c_2(\lambda)$ . Взявши довільну точку  $z_0 \in D_{ij} \setminus B$  для знаходження  $c_1 = c_1(\lambda)$  і  $c_2 = c_2(\lambda)$ , отримуємо систему

$$\begin{cases} f_{1,i}(z_0; \lambda) = c_1 f_{1,j}(z_0; \lambda) + c_2 f_{2,j}(z_0; \lambda), \\ f'_{1,i}(z_0; \lambda) = c_1 f'_{1,j}(z_0; \lambda) + c_2 f'_{2,j}(z_0; \lambda). \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї системи є вронскіаном і  $z_0 \notin B$ , то функції  $c_1 = c_1(\lambda)$  і  $c_2 = c_2(\lambda)$  є цілими. Отже, враховуючи теорему 1, приходимо до висновку, що

функцію  $f_{1,i}(z; \lambda)$  можна продовжити на  $G$  так, що вона буде однозначною в  $G \times \mathbb{C}$ , для кожного  $\lambda \in \mathbb{C}$  буде голоморфним розв'язком в  $G$  рівняння (2) і для кожного  $z \in G$  буде цілою відносно  $\lambda$ . Отже, за теоремою Гартогса функція  $f_1(z; \lambda)$  є голоморфною в  $G \times \mathbb{C}$ . Подібно можна сказати і про  $f_2(z; \lambda)$ .

**Наслідок 3.** Нехай функції  $a_0$  і  $a_1$  є неперервними на деякому проміжку  $\Delta$  з однозв'язної області  $G$  і корені  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  рівняння (3) є такими, що число  $p = \alpha_1 - \alpha_2$  парне. Тоді рівняння (2) не для кожного  $\lambda \in \mathbb{C}$  має фундаментальну систему розв'язків, яка складається із функцій, голоморфних в  $G$ .

**Доведення.** Справді, умова е) теореми 4 для парного  $p$  еквівалентна рівності нулю многочленна від  $\lambda$  степеня  $p/2$  зі старшим коефіцієнтом  $S_0(\alpha_2 + 1)S_0(\alpha_2 + 3)S_0(\alpha_2 + 5) \dots S_0(\alpha_2 + p - 1)$ . Тому  $S_0(\alpha_2 + 1)S_0(\alpha_2 + 3)S_0(\alpha_2 + 5) \dots S_0(\alpha_2 + p - 1) = 0$ , а це неможливо, якщо  $p$  – парне число.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ОНТИ, 1939. – 720с.
2. Латышева К.Я., Терещенко Н.И. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения (метод Фробениуса – Латышевой). – К.: Ин-т матем. УССР, 1970. – 396с.
3. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 384с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Физматгиз, 1953. – Т.3, Ч.2. – 676с.
5. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ., 1962. – 352с.
6. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ., 1953. – Т.1. – 346с.
7. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1941. – 398с.
8. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 565с.
9. Heittokangas J. *On complex differential equations in the unit disk* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. – 2000. – V.122. – 54 p.
10. Кусис П. Введение в теорию пространств  $H^p$ . – М.: Мир, 1984. – 368 с.
11. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
12. Б.В. Винницький, О.В.Шавала. ЗАУВАЖЕННЯ ПРО ГОЛОМОРФНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ Математичні Студії. – 2007. – 28, №1. – С.71-76